Lesson 7

Find the indicated limits:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$. *Ans.* 4. 2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[2\sin x-\cos x+\cot x]$. *Ans.* 2.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2+x}}$. *Ans.* 0. 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)$. *Ans.* 2. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$. *Ans.* $\dfrac{4}{3}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$. *Ans.* 1. 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$. *Ans.* $\dfrac{1}{2}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$. *Ans.* $\dfrac{1}{3}$.

Hint. Write the formula $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ for $k=0, 1, 2, \ldots, n$.

$$\begin{aligned}
1^3&=1,\\
2^3-1^3&=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1,\\
3^3-2^3&=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n+1)^3-n^3&=3n^2+3n+1
\end{aligned}$$

Adding the left and right sides, we get

$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+(n+1),$$
$$(n+1)^3=3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1),$$

whence

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$. *Ans.* ∞. 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$. *Ans.* 0. 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$. *Ans.* $\dfrac{1}{2}$. 12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$. *Ans.* 4. 13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$. *Ans.* 3. 14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$. *Ans.* $\dfrac{1}{8}$. 15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$. *Ans.* 1. 16. $\lim\limits_{y\to -2}\dfrac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$. *Ans.* $-\dfrac{2}{5}$.

17. $\lim\limits_{u\to -2}\dfrac{u^3+4u^2+4u}{(u+2)(u-3)}$. *Ans.* 0. 18. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$. *Ans.* $3x^2$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right]$. *Ans.* -1. 20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$. *Ans.* n (n is a positive integer). 21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$. *Ans.* $\dfrac{1}{2}$. 22. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$. *Ans.* $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$. *Ans.* $\dfrac{q}{p}$ 24. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. *Ans.* $\dfrac{2}{3}$.

25. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$. *Ans.* $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{ma}$. 26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$. *Ans.* $\dfrac{1}{2}$.

27. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$. *Ans.* 1. 28. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. *Ans.* 1 as $x \to +\infty$, -1 as $x \to -\infty$. 29. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$. *Ans.* 0. 30. $\lim\limits_{x \to \infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$. *Ans.* $\dfrac{1}{2}$ as $x \to +\infty$, $-\infty$ as $x \to -\infty$. 31. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x}$. *Ans.* 1.

32. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$. *Ans.* 4. 33. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$. *Ans.* $\dfrac{1}{9}$. 34. $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$. *Ans.* $\sqrt{2}$. 35. $\lim\limits_{x \to 0} x \cot x$. *Ans.* 1. 36. $\lim\limits_{v \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos v}{\sin\left(v-\frac{\pi}{3}\right)}$. *Ans.* $\sqrt{3}$.

37. $\lim\limits_{z \to 1} (1-z)\tan\dfrac{\pi z}{2}$. *Ans.* $\dfrac{2}{\pi}$. 38. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$. *Ans.* $\dfrac{2}{3}$.

39. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$. *Ans.* $2\cos a$. 40. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$. *Ans.* $\dfrac{1}{2}$.

Even examples must be solved in class, odd examples must be solved at home